

# ОЦЕНКА СРОЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

**Георгий Гамбаров**

Банк России

**Иван Шевчук**

Банк России

**Александр Балабушкин**

Фондовая биржа РТС

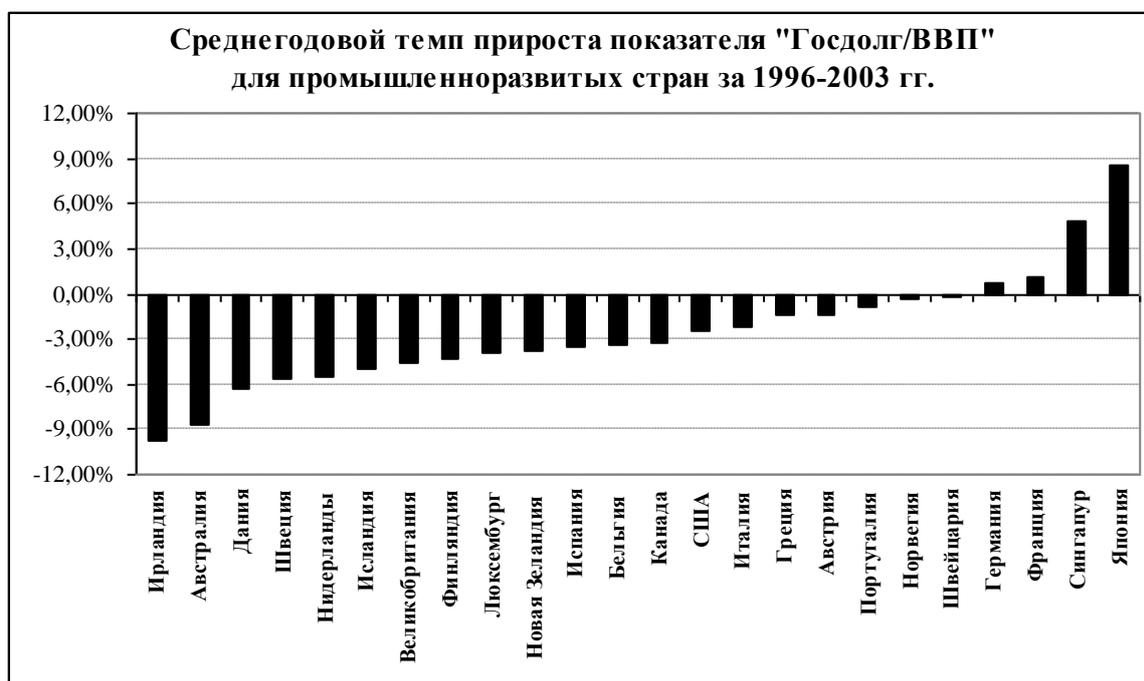
*Срочная структура процентных ставок, лежащая в основе теории оценки активов с фиксированным доходом и являющаяся одним из наиболее дискуссионных вопросов проведения эффективной долговой и денежной политики, составляет предмет интенсивных зарубежных исследований уже более 30 лет. Разработка альтернативных подходов к оценке и отсутствие единого критерия выбора сформировали среди практиков общий взгляд на необходимость тестирования моделей в условиях конкретного рынка государственных ценных бумаг с учетом специфики его структуры и порядка обращения выпусков. В России широко используется кривая доходности к погашению, а общепризнанной модели построения кривой бескупонной доходности (zero-coupon yield curve), адекватно отражающей текущее состояние и наиболее вероятное развитие рынка ГКО-ОФЗ, до сих пор не существует. В настоящей работе предпринимается попытка обосновать важность и актуальность этой задачи, описать некоторые типичные подходы к ее решению и предложить вариант модели, учитывающий специфику текущего состояния рынка ГКО-ОФЗ.*

## **Роль рынка государственных ценных бумаг в оценке срочной структуры процентных ставок**

Развитие российского рынка государственных ценных бумаг и финансового рынка в целом требует создания эталонного инструмента ценообразования, способного служить общепризнанным индикатором стоимости безрисковых заимствований. Традиционное использование государственных ценных бумаг для нахождения безрисковой доходности объясняется наличием у них ряда характеристик, которые при их совместном рассмотрении делают данный финансовый инструмент в некотором смысле уникальным для финансовой системы. Во-первых, государство в большинстве промышленно развитых стран выступает в роли наиболее надежного заемщика, в силу чего его обязательства не сопряжены с кредитным риском. Во-вторых, большой объем государственных заимствований и высокая степень замещения выпусков способствуют активной торговле этими инструментами. По этой причине государственные бумаги, особенно наиболее поздние по дате размещения (бегущие), оказываются, при прочих равных условиях, более ликвидными по сравнению с негосударственными бумагами. В-третьих, в силу значительных финансовых нужд и неограниченного временного горизонта функционирования, государство оказывается способным предложить гораздо большее разнообразие инструментов по спектру сроков, что привлекает к торговле ими существенно более разнородный состав инвесторов и упрощает построение кривой доходности. В-четвертых, наличие хорошо развитых рынков РЕПО и срочных рынков для государственных ценных бумаг позволяет участникам занимать длинные и короткие позиции по этим инструментам, тем самым эффективно

инкорпорировать в цены собственный взгляд на будущую динамику процентных ставок. Таким образом, цены государственных ценных бумаг оказываются наиболее информационно эффективными, что способствует их широкому применению при оценке безрисковых процентных ставок и анализе рыночных ожиданий.

В последнее десятилетие значение рынка государственных ценных бумаг как источника оценки эталонной кривой доходности, являющейся неотъемлемым элементом эффективного функционирования современных финансовых рынков, несколько снизилось с одновременным повышением роли инструментов негосударственного сектора. Причиной тому служат недавние тенденции, сложившиеся на развитых долговых рынках, прежде всего, в ряде европейских стран. Фактически, за исключением Японии, где рынок государственных бумаг развивается стремительными темпами, а также в последние годы США, объемы эмиссии государственных ценных бумаг промышленно развитых стран существенно снизились в конце 90-х гг., следствием чего стало падение доли государственных ценных бумаг в общем объеме долговых бумаг за 1995-2000 гг. с 45% до 35%<sup>1</sup>. Общим проявлением обозначенной тенденции является устойчивое падение доли совокупного государственного долга промышленно развитых стран в валовом внутреннем продукте.



Источник: данные агентства Moody's

Изменение структуры мировых финансовых рынков, обусловленное наличием в ряде стран устойчивого бюджетного профицита, а также снижением общего объема государственного долга,

<sup>1</sup> "The changing shape of fixed income markets"// Basle International Settlement Paper # 5, 2002

привело в последние годы к существенному сдвигу объема торгов в пользу корпоративных долговых инструментов, как на кассовых, так и на срочных рынках. Обозначенная тенденция сформировала среди участников финансового рынка новый взгляд на проблему ценообразования инструментов с фиксированным доходом, построения срочной структуры безрисковых процентных ставок и хеджирования процентного риска.

До настоящего момента в мировой практике преобладали два основных подхода к определению цены любого долгового инструмента: ценообразование на основе безрисковой процентной ставки с учетом премии за риск и ценообразование на основе доходности сопоставимого инструмента. Первый подход предполагает определение безрисковой процентной ставки, в качестве которой традиционно используется доходность государственных ценных бумаг, и по существу сводится к максимально точному определению премии за риск. Второй подход требует либо поиска идентичного финансового инструмента, либо определения соотношения «риск-компенсация за риск» по тем видам рисков, по которым наблюдаются расхождения между оцениваемым и эталонным инструментом. Хотя второй подход на практике используется гораздо чаще, даже в рамках первого подхода роль государственных ценных бумаг на развитых финансовых рынках за последнее десятилетие постепенно перешла к корпоративным инструментам высоконадежных заемщиков.

Срочная структура безрисковых процентных ставок, часто используемая участниками финансового рынка в целях оценки ожидаемой будущей динамики краткосрочных ставок и темпов инфляции, стала определяться на основе инструментов срочного рынка, прежде всего, процентных свопов, а также в существенно меньшей степени обеспеченных корпоративных облигаций. Подобного рода тенденции стали возможны благодаря тому, что определение эффективного прокси-показателя безрисковых процентных ставок не требует полного отсутствия у эталонного инструмента микроэкономических рисков<sup>2</sup>. Единственное требование, налагаемое на характеристики ценового эталона, сводится к прогнозируемости рискованной премии. Например, устойчивый характер бизнеса и финансирования компаний определенной отрасли позволяют считать рисковую компоненту доходности их ценных бумаг постоянной величиной, и потому безрисковую составляющую оказывается определить достаточно просто. На развитых финансовых рынках динамику рискованной компоненты позволяют прогнозировать данные рейтинговых агентств. Инструментов, обладающих такими характеристиками, достаточно много, поэтому проблему построения срочной структуры процентных ставок оказывается возможным разрешить без обращения к государственным ценным бумагам. Последнее обстоятельство подтверждает тот

---

<sup>2</sup> Под микроэкономическими рисками в данной статье подразумеваются риски, связанные с эмитентом (например, кредитный риск) и рассматриваемым финансовым инструментом/базисным активом (например, риск ликвидности).

факт, что многие мировые долговые рынки уже достаточно развиты для того, чтобы позволить корпоративным инструментам выполнять эталонные функции государственных бумаг.

Институциональная и инструментная структуры финансовых рынков развивающихся стран и стран с переходной экономикой накладывают ряд ограничений на степень замещаемости ценных бумаг и возможность корпоративных инструментов в полной мере выполнять функции эталонного ценообразования и выступать прокси-показателями безрисковых процентных ставок. Ключевой особенностью таких рынков является доминирование сегмента государственного долга, что объясняется как повышенной потребностью государства в финансовых ресурсах, обусловленной расхождением в объемах и динамике доходов и расходов бюджета, так и невозможностью со стороны частных заемщиков на данном этапе функционирования сократить риски, сопряженные с инвестированием в корпоративные ценные бумаги<sup>3</sup>.

Текущая ситуация в России в области государственных финансов внешне схожа с условиями реализации долговой политики в развитых странах. Бюджетный профицит, имевший место на протяжении последних четырех лет, несколько снизил роль рынка ГКО-ОФЗ как источника заемного финансирования федерального бюджета и индикатора стоимости заимствований в экономике. В то же время, как свидетельствует вышеописанная практика ряда стран, отсутствие альтернативных эталонных инструментов ценообразования на недостаточно развитом финансовом рынке оказывает негативное воздействие на его функционирование.

Сложившаяся на российском рынке государственных бумаг ситуация не позволяет с полным основанием рассматривать его в качестве ориентира процентных ставок по широкому спектру финансовых инструментов. Сравнительно малое число обращающихся выпусков, высокая концентрация пассивных участников, низкое эффективное предложение, отсутствие маркет-мейкеров на рынке приводят к ослаблению рыночной ликвидности, падению торговой активности, возможностям воздействия на процесс ценообразования в условиях отсутствия высокой конкурентности заявок. Анализ последствий подобного рода эффектов для оценки срочной структуры процентных ставок, нашедший отражение в ряде работ, к числу которых относятся исследования Варга<sup>4</sup>, Крабба, Турнера<sup>5</sup> и Элтона, Грина<sup>6</sup> продемонстрировал, что в описанных

---

<sup>3</sup> Здесь полезно вспомнить об объемах докризисного рынка государственных облигаций в России, который своими размерами просто задавил рынок акций и корпоративных облигаций: к 1998 году соотношение оборотов на рынках государственных и корпоративных ценных бумаг было 11:1, в то время как в развитых странах это соотношение колеблется около 1:1.

<sup>4</sup> Warga A. "Bond returns, liquidity and missing data" // Journal of Financial and Quantitative Analyses, # 27, 1992, pp. 605-617

<sup>5</sup> Crabbe L., Turner C. "Does the liquidity of a debt issue increase with its size? Evidence from the corporate bond and medium-term note markets" // Journal of Finance, # 50, 1995, pp. 1719-1734

условиях использование моделей построения срочной структуры процентных ставок, успешно применяемых на более развитых рынках, имеет следствием получение несостоятельных оценок. В этой связи, возникает необходимость разработки подходов, учитывающих специфику того или иного рынка.

Несмотря на сделанные критические замечания о текущем состоянии рынка ГКО-ОФЗ, начинать работу по анализу рынка с рассматриваемой точки зрения необходимо уже сейчас, отдавая отчет в некоторой условности получаемых результатов и предполагая дальнейшее совершенствование методик в будущем по мере развития рынка.

### **Значение срочной структуры процентных ставок для регуляторов и участников финансового рынка**

Значение срочной структуры процентных ставок можно оценить, рассмотрев ее с позиции трех субъектов: эмитента (Министерства финансов РФ), органа денежного регулирования (Центрального банка РФ) и участников финансового рынка (включая организаторов торгов).

*С точки зрения эмитента*, построение срочной структуры процентных ставок позволит с высокой степенью точности оценить стоимость заимствований, что будет способствовать более эффективному управлению государственным долгом. В соответствии с Концепцией единой системы управления государственным долгом Российской Федерации, Министерство финансов РФ ставит одной из целей управления государственным долгом оптимизацию стоимости обслуживания государственного долга. Учитывая взаимосвязь уровня процентных ставок и их срока, а также существование определенных ориентиров и ограничений на срочную структуру долга, задачу оптимизации стоимости обслуживания невозможно корректно разрешить без обращения к срочной структуре процентных ставок. Более того, на основе конфигурации последней часто принимаются решения об изменении сроков выпускаемых инструментов и частоты их замещения. Для Министерства финансов РФ построение срочной структуры процентных ставок предоставило бы возможность оценить последствия дальнейшего повышения дюрации долга и распределения нагрузки по обслуживанию выпусков. Последнее станет играть основополагающую роль при реализации планируемых в настоящее время мероприятий по введению в обращение базовых выпусков облигаций (*benchmark*).

*С точки зрения органа денежного регулирования*, срочная структура процентных ставок представляет собой информационный индикатор, дающий возможность оценки рыночных ожиданий будущей динамики краткосрочных процентных ставок и темпов инфляции<sup>7</sup>. За

---

<sup>6</sup> Elton E., Green T. "Tax and liquidity effects in pricing government bonds" // Journal of Finance, vol.53, # 5, 1998, pp. 1533-1562

<sup>7</sup> Berk J. "The information content of the yield curve for monetary policy: a survey" // Economist-Leiden, # 146, 1998, pp. 303 - 320.

последние 20 лет значение процентных ставок как источников информации для определения основных направлений денежной политики и операционного инструмента денежного регулирования резко возросло, вызвав практически полное исключение монетарных агрегатов из рассмотрения в качестве инструментов управления. При этом ключевым аспектом выступает соотношение процентных ставок разных сроков.

При использовании срочной структуры процентных ставок перед органом денежного регулирования возникают три задачи:

- 1) оценка срочной структуры процентных ставок;
- 2) интерпретация срочной структуры процентных ставок;
- 3) управление процентными ставками и анализ их воздействия на экономику

От качества решения первой из представленных задач зависит эффективность решения двух других, в связи с чем в настоящей работе ей будет уделено наибольшее внимание.

Интерпретация структуры процентных ставок состоит в оценке ожидаемых процентных ставок (на основе рассмотрения краткосрочного сегмента кривой) и ожидаемых темпов инфляции (на основе рассмотрения долгосрочного сегмента кривой). Отправной посылкой выступает гипотеза ожиданий, предусматривающая, что форвардные ставки являются (возможно, смещенной) оценкой будущих процентных ставок<sup>8</sup>. Это позволяет органу денежного регулирования эффективно соотнести ожидания рынка с ориентирами процентной политики, тем самым имея возможность корректировки собственных решений на ожидаемую конъюнктуру рынка<sup>9</sup>.

Аналогичным образом кривая процентных ставок позволяет найти оценку ожидаемой инфляции, однако в этом анализе базовым соотношением выступает тождество Фишера и результат оказывается, как правило, менее надежным. Сформулировав допущения относительно динамики реальных процентных ставок, ожидаемый темп инфляции становится возможным вычислить как компоненту номинальных процентных ставок. В последующем полученный результат используется как фактор в моделях прогноза инфляции и как индикатор доверия участников рынка к целевым ориентирам по инфляции<sup>10</sup>.

Задача управления процентными ставками и анализа их воздействия на экономику является достаточно сложной и выступает предметом отдельного исследования. Для органа денежного регулирования особый интерес представляет реакция долгосрочных ставок на изменения

---

<sup>8</sup> Buser S.A., Karolyi A.G., Sanders A.B. Adjusted forward rates as predictors of future spot rates. – Journal of Fixed Income, 1996, Vol.6, No.1. – p.29-42.

<sup>9</sup> Rudebusch G. “Federal reserve policy and the predictability of interest rates” // FRBSF Weekly Letter, 1995

<sup>10</sup> Goodfriend M. “Interest rate policy and the inflation scare problem: 1979-1992” // Federal Reserve Bank of Richmond Economic Review 79, # 1, 1993, pp. 1-24

краткосрочных ставок, поскольку согласно известным макроэкономическим моделям все сегменты реального сектора экономики зависят от долгосрочной ставки, тогда как в непосредственном управлении денежного органа находится краткосрочная процентная ставка. Проведенные в данной области исследования подтверждают наличие прямой реакции долгосрочных ставок на краткосрочные, однако степень и скорость последней различаются на разных рынках в разные периоды времени, поэтому требуют специального рассмотрения<sup>11</sup>.

Для Центрального банка РФ построение срочной структуры процентных ставок позволит, прежде всего, иметь прозрачный показатель стоимости денег в российской экономике и оценивать степень воздействия проводимых на рынке ГКО-ОФЗ операций на уровень и структуру процентных ставок долгосрочного сегмента рынка. В настоящее время экономическая ситуация в России не позволяет отказаться от политики управляемого плавания валютного курса, что делает действия Центрального банка РФ на открытом рынке в некоторой степени зависимыми от ситуации на валютном рынке. По этой причине проведение полноценного макроэкономического анализа срочной структуры процентных ставок не представляется возможным.

Однако следует учесть, что в среднесрочной перспективе можно ожидать изменения ситуации на финансовом рынке. Во-первых, «Основные направления единой государственной денежно-кредитной политики на 2004 год» предусматривают создание законодательно оформленного стабилизационного фонда Правительства РФ, достаточно полно аккумулирующего дополнительные доходы от высоких цен на нефть, что позволит Банку России последовательно сократить свое участие на валютном рынке, способствуя постепенному внедрению рыночных механизмов определения стоимости рубля. Во-вторых, этим же документом закреплено намерение Центрального банка РФ ввести в обращение и развивать рынок облигаций Банка России, что сделает возможным идентификацию сверхкраткосрочного сегмента (несколько месяцев) кривой процентных ставок. В-третьих, планируемые Минфином РФ и Центральным банком РФ преобразования рынка ГКО-ОФЗ сделают оценку структуры процентных ставок более надежной, не подверженной искажающему воздействию специфики и условиям обращения отдельных выпусков облигаций.

*С точки зрения участников финансового рынка*, срочная структура процентных ставок выступает, прежде всего, средством оценки деятельности по управлению портфелем ценных бумаг с фиксированным доходом. Непрерывное представление процентных ставок в зависимости от срока дает возможность определения стоимости заимствования и доходности, «очищенной» от кредитного риска, риска ликвидности и других типов рисков, что позволяет успешно их

---

<sup>11</sup> Cook T., Hahn T. "The effect of changes in the federal funds rate target on market interest rates in the 1970s" // Journal of Monetary Economics, # 24, 1989, pp. 331-351

использовать в теориях оценки финансовых активов, а также в аналитических задачах, включающих прогнозирование процентных ставок и оценку кредитных спредов.

Безрисковый характер временной структуры процентных ставок оказывается полезным при необходимости оценки внутренней стоимости активов, принятия решения о проведении операций и формирования торговых эталонов. Отдельным направлением использования срочной структуры процентных ставок выступает построение индекса рынка, который в данном случае не подвержен воздействию непроцентных факторов, искажающих его интерпретацию.

В настоящее время Фондовая биржа РТС предпринимает шаги по формированию рынка срочных контрактов, базисным активом которых выступают государственные ценные бумаги. Построение временной структуры процентных ставок на регулярной основе открывает возможность создания нового сегмента – рынка процентных деривативов, являющихся расчетными срочными контрактами, базисным активом которых являются ставки спот. Активная торговля новым инструментом позволила бы не только создать дополнительный механизм оценки и управления процентными рисками, но и повысить эффективность функционирования рынка ГКО-ОФЗ.

### **Сложность оценки срочной структуры процентных ставок**

В финансовой теории и практике используются две концепции, отражающие срочную структуру процентных ставок: кривая доходности к погашению (*yield curve*) и кривая бескупонной доходности (*zero-coupon yield curve*) или кривая спот-ставок (*spot rate curve*). Существование и использование первой концепции обусловлено простотой расчета и относительной близостью кривой доходности к погашению к кривой бескупонной доходности, тогда как вторая концепция описывает истинную срочную структуру процентных ставок, однако требует специальной техники для оценки. Разница между кривой бескупонной доходности и кривой доходности к погашению именуется купонным эффектом, релевантность которого зависит от ряда факторов. Некоторые исследователи долговых бумаг на основе эмпирического анализа выборки государственных облигаций утверждают, что купонный эффект крайне незначителен и им можно пренебречь при оценке срочной структуры процентных ставок<sup>12</sup>. Другие, ссылаясь на отдельные существенные отклонения кривой бескупонной доходности от кривой доходности к погашению, иллюстрируют неправомочность использования последней в целях оценки структуры процентных ставок<sup>13</sup>. По мнению авторов настоящей статьи, наиболее полное и обоснованное доказательство значимости

---

<sup>12</sup> Malkiel B. “The term structure of interest rates” // Princeton: Princeton University Press, 1966; Nelson C. “The term structure of interest rates” // New York: Basic Books, 1972 и др.

<sup>13</sup> Echols M., Elliott J. “A Quantitative yield curve model for estimating the term structure of interest rates” // Journal of Financial and Quantitative Analysis, # 11, 1976, pp. 87-104; Conard J., Frankena M. “The yield spread between new and seasoned corporate bond yields” // National Bureau of Economic Research, 1969

купонного эффекта было предложено в 1982 году в работе Ливингстона, Джейна<sup>14</sup>. Применяя к инвестициям в две купонные облигации безарбитражные соображения, а также предполагая, что купонная доходность облигаций совпадает с доходностью к погашению, авторы формально рассчитали купонный эффект и показали, что он играет ключевую роль при построении кривой форвардных ставок. При определенных условиях, купонный эффект приводит к изменению формы форвардной кривой, таким образом, оценка срочной структуры форвардных ставок, полученная на основе кривой доходности к погашению, оказывается смещенной.

Взаимосвязь доходности к погашению и бескупонной доходности представима в виде следующего соотношения, предложенного Ливингстоном, Джейном:

$$Y_T = \frac{I - I'_T \cdot D_T}{E'_T \cdot D_T} \quad (1)$$

$Y_T$  – компонента вектора доходностей к погашению размерности  $T^{15}$ ,  $E_T$  – единичный вектор,  $I_T$  – нулевой вектор с единичной последней компонентой<sup>16</sup>,  $D_T$  – вектор дисконт-коэффициентов, рассчитанных на основе бескупонных доходностей

Из выражения (1) видно, что доходность к погашению представляет собой сложным образом «взвешенное среднее» из бескупонных доходностей, поэтому нет оснований полагать, что оба показателя окажутся достаточно близкими по величине. В общем случае, чем больший объем денежных потоков приходится на более ранние даты периода обращения облигации, тем на большую величину будет отклонение доходности к погашению от бескупонной доходности (при условии, что все доходности к погашению не равны между собой).

В принципе, при наличии развитого рынка бескупонных облигаций, оценку кривой доходности можно проводить исключительно по нему без обращения к купонным ценным бумагам, однако эта процедура требует наличия на рынке бескупонных ценных бумаг со сроком до погашения больше года, что на практике наблюдается крайне редко, за исключением рынка стрипованных бумаг. Построение средне- и долгосрочного сегмента кривой доходности на основе инструментов российского рынка ГКО-ОФЗ, а также большинства зарубежных рынков государственных ценных бумаг, требует привлечения к рассмотрению средне- и долгосрочных ценных бумаг, представляющих собой купонные облигации.

В России инструментная структура внутреннего государственного долга, сложившаяся после финансового кризиса 1998 года, представлена в большей части именно купонными облигациями, при этом доля бескупонных выпусков не только незначительна, но и устойчиво снижается на протяжении посткризисных лет.

	<b>1 января 2003 года</b>	<b>1 января 2004 года</b>
--	---------------------------	---------------------------

<sup>14</sup> Livingston M., Jain S. “Flattening of bond yield curves for long maturities” // Journal of Finance, vol.37, # 1, 1982, pp. 157-167

<sup>15</sup> Здесь и далее нижний(ие) индекс(ы) означает размерность вектора (матрицы).

<sup>16</sup> Здесь и далее штрих-символ означает транспонирование вектора (матрицы).

Вид обязательства	Объем, млрд.руб	Доля,%	Объем, млрд.руб	Доля,%
ГКО	18.82	2.88	2.72	0.41
ОФЗ-ПК	24.10	3.68	24.10	3.63
ОФЗ-ПД	350.74	53.59	50.48	7.61
ОФЗ-ФК	207.07	31.64	199.31	30.04
ОФЗ-АД	42.29	6.46	375.42	56.58
ОГНЗ	11.50	1.76	11.50	1.73
ИТОГО	654.51	100	663.53	100

Источник: данные Министерства финансов РФ

Отличительной особенностью российского рынка государственных облигаций последних нескольких лет является выпуск и обращение облигаций с амортизацией долга, предусматривающих частичное погашение номинальной суммы выпуска за период его обращения. Если в начале 2003 года доля амортизационных облигаций в общем объеме долга не превышала 7%, то уже к концу 2003 года больше половины внутреннего российского долга было оформлено в виде ОФЗ-АД. Очевидно, что облигации с амортизацией долга даже приблизительно нельзя рассматривать как бескупонные. Это подчеркивает необходимость точного учета всей структуры выплат по облигациям и требует обращения к более сложной технике оценивания бескупонной кривой доходности.

Одним из наиболее простых вариантов вычислений является оценка процентных ставок непосредственно из уравнения цены купонной облигации, предполагающего, что цена облигации равна приведенной стоимости будущих денежных потоков по ней:

$$P_J = C_{J,T} \cdot D_T \quad (2)$$

$P_J$  – вектор цен облигаций,  $C_{J,T}$  – матрица денежных потоков,  $D_T$  – вектор дисконт-функций

Поскольку система уравнений (2) является линейной по компонентам вектора  $D_T$ , то дисконт-функции, и следовательно спот-ставки, можно определить, выразив их через цены бумаг и матрицу денежных потоков:

$$D_T = C_{J,T}^{-1} \cdot P_J \quad (3)$$

Применение изложенного метода оценки сопряжено с несколькими ограничениями, накладываемыми на матрицу денежных потоков, а именно, в целях обратимости матрица  $C_{J,T}$  должна быть квадратной и несингулярной. В 1980 году Д.Джордан исследовал структуру платежей по облигациям и пришел к выводу, что трудности применения выражения (3) порождаются следующими обстоятельствами<sup>17</sup>:

<sup>17</sup> Jordan J.V. "Studies in direct estimation of the term structure" // University of North Carolina, Ph.D. dissertation, 1980

- наличие двух моментов времени, на которые приходится идентичные денежные потоки и не происходит погашения ни одной из рассматриваемых облигаций, приводит к сингулярности платежной матрицы и неединственности решения;
- даты денежных потоков, на которые не приходится погашение облигаций, приводят к большим ошибкам в расчете

Экономическое свойство обратимости матрицы денежных потоков по облигациям сводится к наличию полного рынка, на котором число обращающихся выпусков совпадает с общим количеством выплат по облигациям ( $J=T$ ) и отсутствуют какие-либо моменты времени, на которые приходится идентичные денежные потоки. На практике свойство полноты рынка не выполняется во-первых, потому что число выпусков в обращении всегда меньше общего числа купонных и номинальных платежей (что необходимо для поддержания высокой ликвидности рынка) и во-вторых, наблюдается синхронизация выплат купонных платежей по разным выпускам (что необходимо для облегчения структурирования выплат и разработки эмиссионных программ). Таким образом, эффективная политика управления государственным долгом делает невозможным формирование полного рынка и оценку процентных ставок на основе выражения (3).

### **Модели оценки срочной структуры процентных ставок**

В литературе по оценке срочной структуры процентных ставок выделяются два подхода к решению проблемы необратимости матрицы денежных потоков, обусловленной неполнотой рынка государственных ценных бумаг.

**Первый подход**, восходящий к трудам ранних исследователей, и представленный в работах Карлетона, Купера и Фама, Блисса, предполагает использование для расчета бескупонных процентных ставок специальным образом сформированной выборки выпусков купонных ценных бумаг. В данном случае по существу образуется подсистема инструментов рынка, позволяющая достичь свойства полноты и исключить из расчета те моменты времени, в которые не происходит погашения ни одного выпуска.

**Второй подход** к решению проблемы необратимости матрицы денежных потоков заключается в наложении априорных ограничений на взаимосвязь дисконт-функций в выражении (2). Редуцируя размерность вектора  $D_T$  через функциональную зависимость его компонент к значению, существенно меньшему числа доступных для расчета выпусков облигаций, становится возможным применить эконометрическую технику оценивания для нахождения всей системы

процентных ставок. В рамках этого подхода выделяют два класса моделей: сплайновые и параметрические.

**Сплайновый метод** оценивания срочной структуры процентных ставок был впервые предложен в работе МакКаллоха<sup>18</sup> 1971 года и в настоящее время является одним из широко используемых подходов. Данный метод заключается в разбиении всего интервала, охватывающего максимальный срок обращения государственных облигаций, на отдельные сегменты, каждый из которых содержит собственную аппроксимирующую процентную структуру функцию, при этом набор этих функций должен удовлетворять следующим свойствам<sup>19</sup>:

- значения двух соседних функций и их первых производных в узловых точках должны совпадать;
- функция должна быть дважды непрерывно дифференцируема на всем интервале.

**Параметрический метод** оценивания срочной структуры процентных ставок был использован в работе И.Купера<sup>20</sup> 1977 года, но более глубокое изучение и статистическую проверку нашел в работах более поздних исследователей. В настоящее время он является наиболее распространенным методом построения срочной системы спот-ставок<sup>21</sup>. Данный метод заключается в использовании одной параметрической функции для описания всего множества спот-ставок на сроках, не превышающих срок погашения наиболее длинной облигации. Его отличительная особенность от сплайнового подхода состоит в том, что для его реализации требуется гораздо меньший набор параметров, что одновременно позволяет достигать большей гладкости получаемой процентной структуры<sup>22</sup>. Однако платой за последнее свойство является меньшая способность к аппроксимации сложных форм срочных структур, а также априорное наложение взаимосвязи между динамикой отдельных секторов фондового рынка, что затрудняет проведение анализа процентных ставок в рамках теории рыночной сегментации

Задачей исследователя, избравшего данный метод оценивания структуры процентных ставок, является выбор функции, которая позволяет приемлемым образом описывать форму кривой спот-ставок. Согласно теореме об аппроксимации Вейерштрасса существует класс функций, позволяющий с произвольно малой погрешностью приблизить любую другую непрерывную функцию. К числу функций такого класса относятся полиномиальные и экспоненциальные функции. Выбор параметрической функции из упомянутого семейства в целях

---

<sup>18</sup> McCulloch J.H. "Measuring the term structure of interest rates" // Journal of Business, vol.44, issue1, 1971, pp. 19-31

<sup>19</sup> Ahlberg J., Nilson E., Walsh J. «The theory of splines and their applications» // Academic Press, 1967

<sup>20</sup> Cooper I.A. "Asset values, interest rate changes, and duration" // Journal of Financial and Quantitative Analysis, # 12, 1977, pp. 701-724

<sup>21</sup> Geyer A., Mader R. "Estimation of the term structure of interest rates: a parametric approach" // Oesterreichische Nationalbank, Working Paper, # 37, 1999

решения конкретной задачи с использованием полученных процентных ставок представляет собой достаточно сложную задачу, выступающую при необходимости предметом отдельного исследования. В настоящее время применяются несколько моделей, различающихся между собой функцией, используемой при выведении процентных ставок, а также методом анализа получаемого эконометрического уравнения.

### **Ключевые критерии выбора модели оценки срочной структуры процентных ставок**

Проблема выбора метода оценки требует рассмотрения альтернативных вариантов решений в плоскости «точность-гладкость», что выходит за рамки собственно технологии оценивания, и определяется исключительно экономическими соображениями. Наиболее приемлемой является такая структура процентных ставок, которая максимально точно описывает ценообразование облигаций, как вошедших в выборочную совокупность, так и не участвующих в расчете, и одновременно обладает степенью гладкости, позволяющей проводить анализ рыночных ожиданий. К сожалению, на практике подобного рода процентные структуры встречаются редко, в большинстве случаев связь между точностью и гладкостью оказывается обратной, что делает выбор модели в некотором смысле предметом отдельного исследования.

Для целей анализа рыночных ожиданий ключевым свойством, которым должна обладать структура процентных ставок, является гладкость, предоставляющая возможность исследования форвардных ставок на предмет оценки ожидаемой будущей динамики краткосрочной ставки и инфляции. При этом информационное содержание процентной структуры должно соответствовать реальным процессам, происходящим на рынке.

Для целей ценообразования финансовых инструментов с фиксированным доходом приоритет смещается в сторону большей точности, поскольку кривая форвардных ставок не является в этом случае предметом отдельного рассмотрения. Однако проблема выбора не становится однокритериальной. Дело в том, что технически нет никаких препятствий в получении кривой, которая будет давать нулевую ошибку в оценке. Однако в той степени в какой полученная структура процентных ставок оказывается точной, в такой же степени она оказывается бесполезной. Результат не только будет непригоден для целей макроэкономического анализа, но даже не позволит получать сколь-нибудь надежные результаты в задачах ценообразования процентных инструментов и оценке доходности неторгуемых выпусков. Таким образом, двукритериальный характер выбора модели оценки срочной структуры процентных ставок делает

---

<sup>22</sup> Adams K., Van Deventer D. "Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness" // Journal of Fixed Income, issue # 1, # 4, 1994, pp. 52-62

необходимым нахождение оптимума, предусматривающего спецификацию отношения предпочтения, соответствующего поставленной задаче.

## **Оценка срочной структуры процентных ставок по российскому рынку государственных облигаций**

### **1) порядок формирования выборки государственных ценных бумаг**

Для корректного проведения процедуры построения срочной структуры процентных ставок по российскому рынку необходимо сформировать выборку ценных бумаг, представляющую собой некий базис для оценки рыночных процентных ставок..

Ключевое требование к выборке состоит в наличии свойства однородности вошедших в нее объектов. Выпуски бумаг, на основе которых производится расчет процентных ставок, должны обладать идентичными условиями обращения.

Некоторые исследователи склоняются к рассмотрению структуры денежных потоков как отдельного критерия формирования выборки. Например, Гейер, Мэйдер не рекомендуют использовать бумаги с амортизацией долга совместно с обычными купонными бумагами, поскольку частичное погашение номинала может рассматриваться участниками рынка как возможность быстрее вернуть средства, что делает бумагу более привлекательной. Другими словами, существенное расхождение между сроком до погашения и дюрацией выпуска не позволяет, по мнению исследователей, рассматривать его наряду с другими бумагами. Для российского рынка ГЦБ такой подход неприменим в силу доминирования инструмента ОФЗ-АД не только в структуре государственного долга<sup>23</sup>, но и в обороте торгов<sup>24</sup>. Кроме того, этот инструмент характеризуется большим сроком до погашения, поэтому исключение его из рассмотрения сделает оценку долгосрочного сегмента кривой процентных ставок менее надежной.

Важным аспектом, требующим специального рассмотрения, является низкая частота заключения сделок по ряду выпусков, что приводит к отсутствию информации о средневзвешенных ценах в отдельные периоды времени. Из-за присутствия на рынке небольшого числа выпусков исключить данные бумаги из рассмотрения не представляется возможным, что требует использования информации о торгах по данным выпускам за предыдущий период времени. Хотя в целях сравнительного анализа моделей оценки процентных ставок это является допустимым, необходимость получения качественного результата на регулярной основе требует модификации изложенных моделей, поэтому в последующих разделах настоящей работы проблема низкой частоты заключения сделок будет рассмотрена более детально.

### **2) критерии и результаты сравнительного анализа моделей оценки процентных ставок**

---

<sup>23</sup> Там же.

<sup>24</sup> Например, 15.01.2004. объем сделок с ОФЗ-АД составил более 90% совокупного объема сделок.

Сравнение моделей оценки процентных ставок будет осуществляться по совокупности критериев, к числу которых относятся следующие:

1. внутривыборочная среднеквадратическая ошибка
2. вневыборочная среднеквадратическая ошибка
3. коэффициент гладкости
4. возможность получения отрицательных форвардных ставок
5. наличие мгновенной и бессрочной ставки
6. динамическая состоятельность
7. простота реализации

Первые три критерия являются количественными и определяются по данным конкретного рынка, а остальные четыре – качественные, отражающие характеристики модели. Внутривыборочная и вневыборочная среднеквадратические ошибки задают точность получаемых оценок, при этом второй из этих показателей является более надежным, поскольку основан на неучастующих в расчете выпусках. При расчете вневыборочного показателя по каждой модели производилась следующая процедура: из выборки исключался один из выпусков, оценивалась структура процентных ставок, и определялась ошибка по исключенному выпуску. Определив таким образом ошибки по каждому выпуску формировался показатель среднеквадратической ошибки в соответствии со следующей формулой:

$$RMSE = \sqrt{\tilde{Y}'_j \tilde{Y}_j} \quad (7)$$

$\tilde{Y}_j$  - вектор отклонений фактических доходностей к погашению от расчетных, где  $J$  – число выпусков в выборке (для внутривыборочного показателя) или число исключенных выпусков (для вневыборочного показателя)

Гладкость кривой процентных ставок оценивалась на базе коэффициента гладкости, который определялся следующим образом:

$$SC = \int_{\tau_0}^{\tau_n} f'(t; \tau)^2 d\tau \quad (8)$$

$f(t; \tau)$  – функция форвардных ставок

Свойство гладкости представляет большое значение, прежде всего, для форвардных ставок, содержащих ожидаемую компоненту будущих ставок спот. Негладкие кривые форвардных ставок сопряжены со значительным изменением ожиданий, что не имеет экономического обоснования на долгосрочном горизонте структуры процентных ставок. Таким образом, гладкие кривые форвардных ставок являются предпочтительными при интерпретации результата.

Оставшиеся четыре критерия были оценены на основе качественного анализа свойств исследуемых моделей. Свойство динамической состоятельности оценивалось в соответствии с подходом Бьёрка, Кристенсена. Простота реализации метода характеризует возможность его использования без проведения дополнительного анализа данных. Например, модель Фишера,

Найка, Зервоса требует вычисления сглаживающего коэффициента на основе технологии кросс-проверки, что усложняет модель и приводит к необходимости постоянного пересмотра ее параметров.

ТАБЛИЦА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИМЕНЕНИЯ  
МОДЕЛЕЙ ОЦЕНКИ СРОЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК<sup>25</sup>

Модель оценки срочной структуры процентных ставок	1*	2	3	4	5	6	7
Фама, Блисс** (1987)	3.24	4.92	2.18	-	-	+	+
МакКаллох (1975)	3.28	5.37	1.83	-	-	+	+
Васичек, Фонг (1982)	3.53	5.98	1.54	-	-	+	+
Фишер, Найка, Зервос (1995)	3.34	6.28	1.70	-	-	+	-
Ваггонер (1996)	3.21	4.94	1.77	-	-	+	-
Чамберс, Карлетон, Вальдман (1984)	5.21	7.77	1.85	-	+	-	+
Нельсон, Сигель (1987)	3.49	4.84	1.39	-	+	-	+
Блисс (1988)	3.32	4.79	1.46	-	+	-	+
Колеман, Фишер, Ибботсон (1992)	3.84	4.78	0.00	+	-	-	+
Свенссон (1994)	3.26	4.68	1.49	-	+	-	+

\*- название критерия соответствует его порядковому номеру

\*\* - модель дополнена техникой локального линейного сглаживания

«-»- отрицательная характеристика модели

«+»- положительная характеристика модели

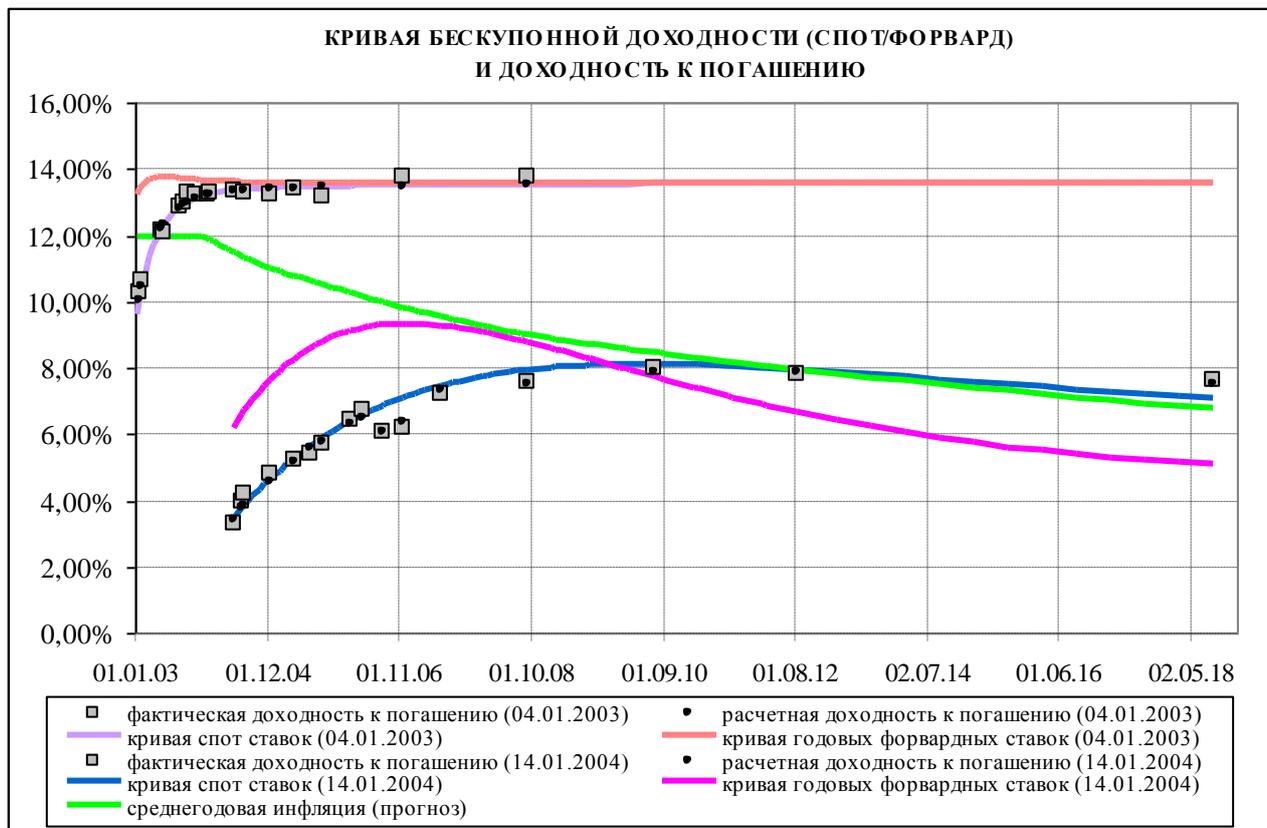
Как следует из проведенных расчетов, сплайновые модели оценки не позволяют значительно улучшить качество результата, несмотря на повышение потенциальной гибкости кривой. Размеры ошибок на внутривыборочных данных оказались близки по всем моделям, за исключением модели Чамберса, Карлетона, Вальдмана. В то же время модель Фишера, Найка, Зервоса, дающая низкую ошибку на выборке, не позволяет обеспечить достаточно высокую точность на вневыборочных данных.

Из числа рассмотренных моделей приемлемый результат обеспечивают модели Ваггонера, Нельсона, Сигеля и Свенссона. Учитывая, что по критерию наличия дополнительной информации в виде параметров, отражающих уровень мгновенной и бессрочной ставок, модель Нельсона, Сигеля является предпочтительной, выбор авторов для проведения дальнейшего анализа склонился в ее пользу.

Возможности оценки срочной структуры процентных ставок, предоставляемые четырехпараметрической моделью Нельсона, Сигеля можно проиллюстрировать на рисунке,

<sup>25</sup> Расчет производился за период с 11.06 по 27.10.2003, результаты оценки первых двух критериев приведены с учетом масштабирующего множителя 10000, третьего – 100.

отражающем изменение структуры за период с 04.01.2003 по 14.01.2004 совместно с кривой форвардных ставок и прогнозных темпов инфляции<sup>26</sup>.



За представленный период срочная структура процентных ставок изменилась не только в уровне, но и по форме. В начале 2003 года кривая имела на большей части сроков горизонтальный вид, тем самым иллюстрируя отсутствие у участников рынка ожиданий будущего роста процентных ставок<sup>27</sup>. Установка макроэкономических регуляторов на постепенное снижение инфляции позволила процентным ставкам упасть до уровня, представленного на рисунке синей кривой, который обеспечивал в начале 2004 года участникам финансового рынка нулевую реальную доходность при сроке вложений, превышающем восемь лет. Одновременно с этим, нисходящий вид кривой форвардных ставок подтверждает представление большей части инвесторов о дальнейшем падении долгосрочных процентных ставок.

### **Количественные характеристики низкой ликвидности рынка ГКО-ОФЗ**

Низкая ликвидность рынка ГКО-ОФЗ находит отражение в следующих характеристиках:

<sup>26</sup> Прогнозные темпы инфляции были рассчитаны исходя из годовых значений, предусмотренных Программой социально-экономического развития России и Основными направлениями единой государственной денежно-кредитной политики на 2004 год. Для обеспечения сопоставимости со ставками спот, прогнозные темпы инфляции были усреднены с помощью геометрической средней.

<sup>27</sup> Для оценки ожидаемых значений будущих ставок спот из текущих значений форвардных ставок необходимо вычленить форвардные премии. Анализ размеров и динамики форвардных выходов за рамки настоящей работы, однако

- **низкая активность**

Средний дневной оборот без учета доразмещений составляет около 20-30 млн. долларов.

- **малое число обращающихся выпусков**

Общее число обращающихся на российском рынке государственных ценных бумаг выпусков не превышает 35, тогда как на развитых рынках государственных долга их число может достигать 250.

ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗМЕРОВ И ЧАСТОТЫ ВЫПУСКОВ<sup>28</sup>

млрд.долл	ОБЪЕМ В ОБРАЩЕНИИ	ЧИСЛО ВЫПУСКОВ	СРЕДНИЙ РАЗМЕР ВЫПУСКА	ЧАСТОТА ВЫПУСКА*
<b>США</b>	3457	248	13.9	3-12
<b>Канада</b>	285	125	2.3	0.5-2
<b>Великобритания</b>	458	82	5.6	0.5-1
<b>Германия</b>	563	115	4.9	2-4
<b>Франция</b>	551	н.д.	н.д.	н.д.
<b>Италия</b>	1100	199	5.5	1-4
<b>Бельгия</b>	232	138	1.7	-**
<b>Нидерланды</b>	176	50	3.5	2
<b>Швеция</b>	111	28	4	-**
<b>Швейцария</b>	35	46	0.8	-**
<b>Япония</b>	1919	234	8.2	12
<b>Россия***</b>	16	31	0,5	-**

\* - число раз в год

\*\* - не фиксировано

\*\*\* - добавлено авторами на 02.04.2004

Из представленной таблицы видно, что рынок ГКО-ОФЗ в максимальной степени приближен к самому маленькому из представленных рынков – рынку Швейцарии, на котором обращается 46 выпусков с общим объемом в обращении на уровне 35 млрд. долл.

- **неоднородная ликвидность**

Эффект неоднородной ликвидности проявляется в больших спредах между ценами заявок, значительном разбросе цен сделок и соответствующих им доходностях к погашению как по отдельно взятому выпуску, так и по «соседним» выпускам с близкими датами погашения

- **«пропуски данных»**

Рынок ГКО-ОФЗ характеризуется частым отсутствием сделок по тем или другим выпускам в каждый отдельно взятый день.

В качестве иллюстрации рассмотрим период с 11.06 по 27.10.2003. За этот период было совершено 4790 сделок, или в среднем около 50 сделок в день. В основном операции проводились с короткими выпусками (рис. 1). В интервале сроков до погашения более 10 лет сделки отсутствовали в 30% дней, а в интервале от 6 лет – в 16% дней.

---

можно полагать, что поскольку премии являются строго положительными, ожидаемые значения будущих ставок спот находятся ниже текущих ставок (на 04.01.2003)

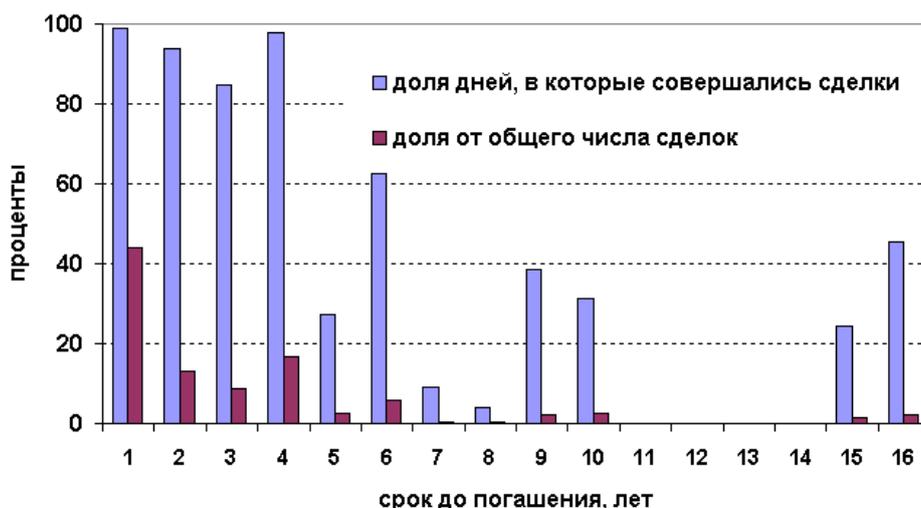


Рис. 1. Интенсивность сделок на рынке ГКО-ОФЗ в зависимости от срока до погашения выпусков

Все это усложняет задачу построения спот-кривой. В частности, пропуски данных не позволяют при построении кривой доходности ограничиваться только сделками текущего дня. Типичный проблемный случай по итогам торгов 1.08.2003 (день T) показан на рис. 2. По горизонтальной оси отложены сроки до погашения в годах, по вертикальной – доходности в базисных пунктах. При этом обозначено:

- YTM market T - фактические доходности к погашению по ценам сделок (если с некоторым выпуском было совершено несколько сделок, все они показаны отдельными точками);
- NS T - спот-кривая, построенная по формуле Нельсона, Сигеля;
- YTM NS T – модельные (расчетные) доходности тех же выпусков, полученные по спот-кривой NS T.

Спот-кривая NS T подобрана таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений фактических и расчетных доходностей была минимальна. Для сравнения на рис. 3 показаны фактические доходности к погашению в предыдущий (T-1) и последующий (T+1) торговые дни и соответствующие им спот-кривые. Видно, что ситуация на рынке между днями T-1 и T+1 существенно не поменялась, в частности, в каждый из этих дней имели место сделки по 15-летнему выпуску с близкими доходностями. Однако кривая дня T «ничего не знает» об этом и дает ошибку на правом конце почти в 100 базисных пунктов.

<sup>28</sup> Inoue H. “The structure of government securities markets in G10 countries: summary of questionnaire results” // Financial Markets Department, Bank of Japan, 2000

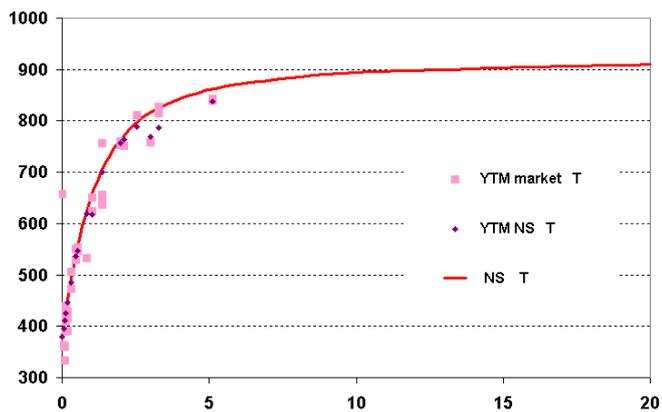


Рис. 2. Спот-кривая по итогам торгов 1.08.2003 (день T)

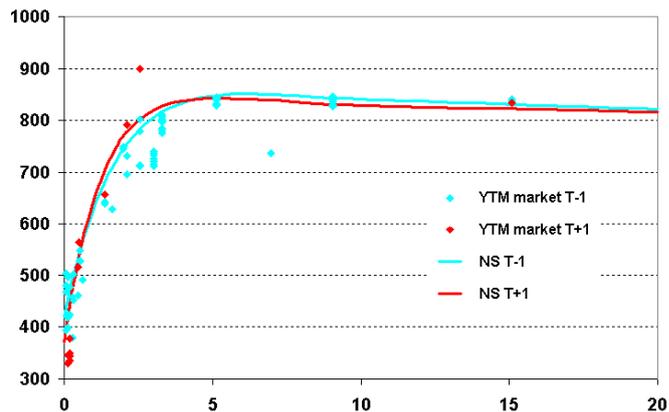


Рис. 3. Спот-кривые для дней T-1 и T+1

Аналогичная проблема отмечалась Кортазаром, Шварцем, Нараньо при попытке описания спот-кривой чилийского рынка государственных облигаций параметрическими моделями Нельсона, Сигеля или Свенссона<sup>29</sup>. Для обхода данной трудности указанные авторы использовали метод, в котором при построении спот-кривой учитываются результаты торгов не только текущего дня, но и предыдущих дней, чем обеспечивается преемственность кривой доходности ото дня ко дню. В первом приближении метод Кортазара, Шварца, Нараньо (далее – метод CSN) можно сравнить со сглаживанием временных рядов методом экспоненциального скользящего среднего, в котором выбором параметра сглаживания достигается компромисс между гладкостью результирующего ряда и степенью его чувствительности к вновь поступающим значениям. Более точно, в методе CSN применяется фильтр Калмана – рекуррентный алгоритм получения оптимальных оценок ненаблюдаемого случайного процесса по «зашумленным» наблюдениям.

Метод CSN относится к целому направлению исследования кривых доходности, в котором в качестве отправной точки принимается модель для поведения краткосрочной процентной ставки  $r$  (более точно – мгновенной процентной ставки)<sup>30</sup>. Распространены так называемые аффинные модели, в которых  $r$  представляется как линейная комбинация координат некоторого диффузионного процесса  $x$  с постоянными или линейно зависящими от  $x$  коэффициентом сноса и диффузией. Частными случаями аффинных моделей являются модели Мертона, Васичека и Кокса-Ингерсолла-Росса (в частности, в методе CSN используется трехмерная модель Васичека). Аффинные модели удобны тем, что в их рамках удается получать решения многих задач в аналитической форме, включая задачи ценообразования производных инструментов. Достаточно простой общий вид имеет и выражение для дисконтной функции, которое выводится из условия

<sup>29</sup> Cortazar G., Schwartz E.S., Naranjo L.F. "Term Structure Estimation in Low-Frequency Transaction Markets: A Kalman Filter Approach with Incomplete Panel-Data" // University of California, Pontificia Universidad Catolica de Chile, 2003

<sup>30</sup> Munk C. "Fixed Income Analysis: Securities, Pricing, and Risk Management" // Lecture notes, University of Southern Denmark, 2004

безарбитражности (конкретная формула зависит от выбранной модели диффузионного процесса  $x$ ):

$$D(t) = A(\alpha, t)e^{-B(\alpha, t)x}, \quad (7)$$

где  $t$  - срок до погашения,  $A(\alpha, t), B(\alpha, t)$  - заданные скалярная функция и вектор-строка функций,  $\alpha$  обозначает все постоянные параметры, входящие в уравнение для диффузионного процесса  $x$ . Соответственно, спот-доходность, выраженная в виде непрерывно начисляемой процентной ставки, дается выражением

$$R(t) = -\frac{1}{t} \ln D(t) = -\frac{1}{t} \ln A(\alpha, t) + \frac{1}{t} B(\alpha, t)x, \quad (8)$$

то есть описывается линейной комбинацией функций времени. Процесс  $x$  является ненаблюдаемым «ядром» всей модели, через уравнение (7) он доступен косвенному наблюдению в виде цен сделок с облигациями (или соответствующих доходностей к погашению). В такой схеме фильтр Калмана применяется для получения оценки текущего состояния вектора  $x$  на основании всей имеющейся предыстории наблюдений. После того, как алгоритм оценивания определен, проводится его тестирование и настройка постоянных параметров  $\alpha$  таким образом, чтобы модель в наибольшей степени соответствовала реальным данным (калибровка или идентификация модели). Поскольку фильтр Калмана дает оптимальную оценку только в линейных моделях, а реально часть элементов модели оказывается нелинейной, применяется либо так называемый расширенный фильтр Калмана, упрощенно и не вполне строго заменяющий исходные уравнения на линеаризованные, либо более сложные алгоритмы, точнее учитывающие нелинейность<sup>31</sup>.

В целом, данный подход обладает рядом положительных свойств:

- для всей спот-кривой получается единое параметрическое выражение, согласованное с моделью динамики мгновенной процентной ставки в смысле отсутствия арбитражных возможностей;
- гладкая спот-кривая допускает экстраполяцию на большие сроки до погашения, что может быть необходимо, например, при оценке стоимости вновь размещаемого выпуска со сроком до погашения, превышающем сроки обращающихся выпусков;
- эффект пропуска данных смягчается тем, что входные данные обрабатываются как единый поток без разделения на дни; при этом больший вес придается более поздним наблюдениям, то есть информация, содержащаяся в ранних наблюдениях, со временем «устаревает», причем скорость устаревания регулируется настроенными коэффициентами;

<sup>31</sup> Baadsgaard M., Nielsen J.N., Madsen H. "Estimating Multivariate Exponential-Affine Term Structure Models from Coupon Bond Prices using Nonlinear Filtering"// 2000

- имеется возможность обрабатывать поступающую ценовую информацию сделка за сделкой в режиме реального времени, что обеспечивает внутрисуточную динамику кривой; эти «потиковые» изменения необходимы при запуске срочных инструментов, иначе спекулятивная привлекательность срочного инструмента резко снижается;
- с введением «бэнчмарок» спот-кривая должна точнее привязываться к доходностям этих выпусков, что легко и интуитивно понятным образом обеспечивается приписыванием этим наблюдениям более высокой точности; кроме того, если данные обрабатываются сделка за сделкой в режиме реального времени, то автоматически более точная привязка осуществляется к тем выпускам, по которым проходит больше сделок; если необходимо, то дополнительно может учитываться объем сделки.

Отмеченные выше частые пропуски данных на рынке ГКО-ОФЗ и значительный разброс доходностей фактически определяют необходимость использования параметрического подхода с небольшим количеством параметров, причем оценка параметров на основе непрерывного потока данных о сделках алгоритмом типа фильтра Калмана может значительно улучшить результат. По этим же причинам вряд ли целесообразно на данном этапе применять сложные модели. Одной из наиболее простых и успешно зарекомендовавших себя как на развитых рынках, так и по итогам проведенного на российском рынке сравнения, является модель Нельсона, Сигеля (далее NS), в которой непрерывно начисляемая процентная ставка записывается в виде:

$$R_{NS}(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{\tau}{t} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] - \beta_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (9)$$

Обычная спот-ставка связана с непрерывно начисляемой соотношением

$$Y_{NS}(t) = \exp\left(\int_0^t R_{NS}(s) ds\right) - 1, \quad (10)$$

а дисконтная функция дается выражением

$$D_{NS}(t) = \exp\left(-\int_0^t R_{NS}(s) ds\right) = \frac{1}{\exp\left(\int_0^t R_{NS}(s) ds\right)} = \frac{1}{1 + Y_{NS}(t)}. \quad (11)$$

Особенно простым является выражение для мгновенной форвардной ставки, соответствующей (9):

$$forward_{NS}(t) = \beta_0 + \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (12)$$

По отношению к аффинным моделям формула NS обладает, как уже упоминалось, тем недостатком, что не учитывает требования безарбитражности. Однако говорить об этом свойстве в рамках аффинной модели имеет смысл лишь постольку, поскольку есть основания считать, что откалиброванная модель действительно хорошо описывает динамику рынка. Например, ряд

исследователей<sup>32</sup> тестировали некоторые распространенные модели (Васичека, Кокса-Ингерсолла-Росса и ее модификацию Чена-Скотта (Chen-Scott)) на примере рынка американских казначейских обязательств за период с 1964 по 1992 год и получили отрицательный результат, такой же вывод был сделан в работе Гейера, Пичлера для модели Кокса-Ингерсолла-Росса<sup>33</sup>. Более грубые модели с меньшим числом параметров более устойчивы («робастны») по отношению к изменениям статистических свойств оцениваемых процессов. Ввиду слабой исследованности с рассматриваемой точки зрения статистических свойств рынка ГКО-ОФЗ предлагается использовать апробированную модель NS в качестве базовой, уточняя в случае необходимости спот-кривую введением корректирующих членов. Соответствующий алгоритм описан ниже.

Дополнительным аргументом в пользу выбора модели NS является широкий диапазон изменения параметров кривой доходности на рынке ГКО-ОФЗ. Рассмотрим рис. 4, 5, где изображены:

- NS – спот-кривая (10);
- YTM – фактические доходности к погашению, рассчитанные по ценам сделок;
- NS YTM – модельные доходности к погашению, рассчитанные по спот-кривой NS;
- forward – форвардная кривая (12).

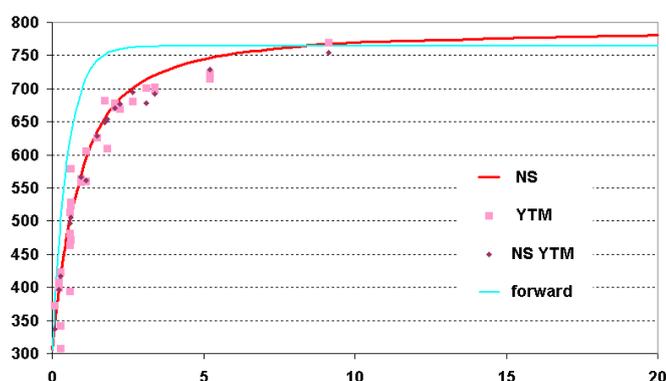


Рис. 4. Спот-кривая NS по итогам торгов 24.06.2003

$$\tau = 0,6$$

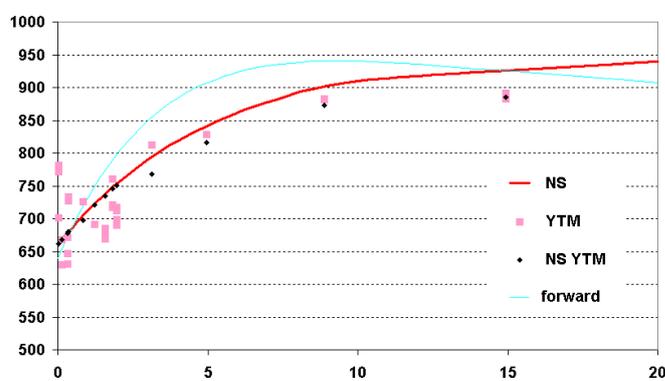


Рис. 5. Спот-кривая NS по итогам торгов 26.09.2003

$$\tau = 5,4$$

Обращает внимание почти 10-кратный диапазон изменения параметра  $\tau$ , характеризующего степень крутизны или пологости кривой. Как было упомянуто, в аффинных моделях после предварительной настройки параметров  $\alpha$  функции  $A(\alpha, t)$ ,  $B(\alpha, t)$  фиксируются

<sup>32</sup> Jin-Chuan Duan, Jean-Guy Simonato “Estimating and Testing Exponential-Affine Term Structure Models by Kalman Filter” // Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations, Scientific Series, 95s-44, 1995

<sup>33</sup> Geyer A.L.J., Pichler S. “A State-Space Approach to Estimate and test Multifactor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure” // Journal of Financial Research, 22, 107-130

жестко и все изменения кривой доходности (8) получаются за счет пересчета оценки вектора  $x$ . Рис. 6, 7 показывают, как те же наборы данных описываются методом CSN при настроенных коэффициентах, которые были подобраны для рынка чилийских государственных облигаций. Если на рис. 6 оба варианта достаточно близки, то на рис. 7 кривой CSN не удается в достаточной мере «распрямиться».

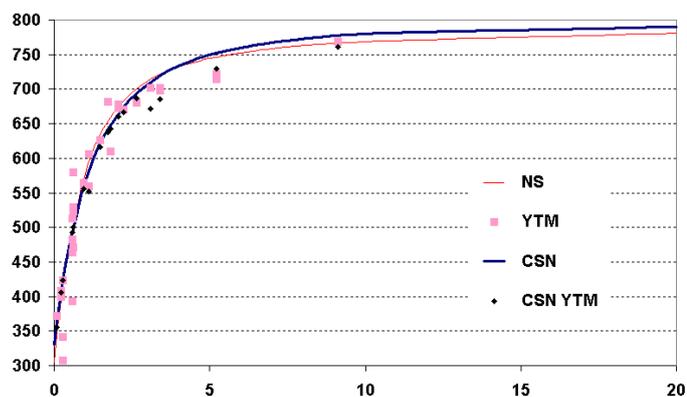


Рис. 6. Спот-кривая по итогам торгов 24.06.2003  
Сравнение методов CSN и NS

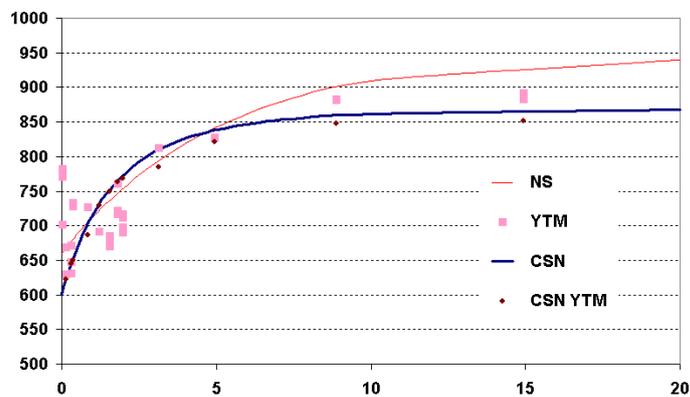


Рис. 7. Спот-кривая по итогам торгов 26.09.2003  
Сравнение методов CSN и NS

В методе CSN и других аффинных моделях параметры подбираются на основе статистической обработки данных в предположении их стационарности. Изменение статистических свойств наблюдаемых данных должно приводить к перестройке параметров модели, однако, как отмечается в ряде работ<sup>34</sup>, такая процедура является внутренне противоречивой (*internally inconsistent*), поскольку в таком случае эти параметры должны включаться в число переменных модели  $x$ . Модель Нельсона, Сигеля при минимальном числе параметров способна описывать широкий диапазон кривых доходности и при этом все ее параметры можно включить в число переменных. Хотя в предлагаемом далее алгоритме, основанном на фильтре Калмана, ряд параметров также подбирается на основании статистических свойств динамики кривой и случайных флуктуаций цен сделок, число настраиваемых параметров минимально.

## Метод оценки

### Этап I - фильтр Калмана для модели NS

#### Описание алгоритма

<sup>34</sup> Chen R.R., Scott L. "Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests From a Kalman Filter Model" // Unpublished Manuscript, University of Georgia, 2002

Фильтру Калмана посвящена обширная литература<sup>35</sup>. В качестве ненаблюдаемого процесса, подлежащего оцениванию, примем набор всех параметров модели NS:  $x = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$ . Динамику модели зададим в простейшей форме:

$$x_n = x_{n-1} + \xi_n \quad (13)$$

где нижний индекс означает номер торгового дня,  $\xi_n$  - случайный вектор с нулевым средним и диагональной ковариационной матрицей  $Q$ . При заданном векторе  $x_n$  определены дисконтные функции (11) и может быть вычислена модельная цена любого выпуска ГКО-ОФЗ, а затем найдена соответствующая доходность к погашению. Тем самым задана функция доходности к погашению в зависимости  $x_n$  (хотя эта функция не может быть выписана в явном виде). Наблюдениями являются доходности к погашению, рассчитанные по реальным сделкам. Если в день  $n$  было совершено  $m_n$  сделок, то уравнение наблюдений состоит из  $m_n$  строк и имеет вид

$$y_n = f_n(x_n) + \eta_n, \quad (14)$$

где случайный вектор  $\eta_n$  имеет нулевое среднее и диагональную ковариационную матрицу  $V_n = \text{diag}(V_n^{11}, \dots, V_n^{m_n m_n})$ . Предполагается, что корреляция как внутри временных рядов  $\xi_n, \eta_n$ , так и между ними отсутствует. Смысл погрешности наблюдений  $\eta_n$  состоит в том, чтобы охарактеризовать случайный разброс реально наблюдаемых доходностей. Чем меньше дисперсия  $V_n^{kk}$  погрешности некоторой наблюдаемой доходности  $y_n^k$ , тем больший вес будет придан данному наблюдению и тем ближе к нему окажется модельная доходность.

Расширенный фильтр Калмана для уравнений (13), (14) имеет следующий вид. Первоначально задается некоторая оценка  $\bar{x}_0$  вектора  $x_0$  и соответствующая ей ковариационная матрица ошибки оценивания  $\Gamma_0 = E(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'$ . Алгоритм оценивания состоит в том, что из оценки  $(\hat{x}_{n-1}, \hat{\Gamma}_{n-1})$  и наблюдений  $y_n$  новая оценка  $(\hat{x}_n, \hat{\Gamma}_n)$  выводится рекуррентно:

$$\hat{\Gamma}_n = \hat{\Gamma}_{n-1} + Q \quad (15)$$

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \hat{\Gamma}_n H_n' (H_n \hat{\Gamma}_n H_n' + V_n)^{-1} (y_n - f_n(\bar{x}_{n-1})) \quad (16)$$

$$\Gamma_n = \hat{\Gamma}_n - \hat{\Gamma}_n H_n' (H_n \hat{\Gamma}_n H_n' + V_n)^{-1} H_n \hat{\Gamma}_n, \quad (17)$$

где

<sup>35</sup> Подробное описание фильтра Калмана можно найти, например, в книге: Р.Ш. Липцер, А.Н.Ширяев «Статистика случайных процессов» //Москва, «Наука», 1974

$$H_n = \left. \frac{\partial f_n(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_{n-1}} \quad (18)$$

- матрица, в которой количество строк равно размерности функции  $f_n(x)$ , количество столбцов – размерности вектора  $x_n$ .

Если бы уравнение (14) было линейным:  $y_n = H_n x_n + \eta_n$ , то фильтр Калмана обеспечивал бы на каждом шаге оптимальную в среднеквадратическом оценку вектора  $x_n$  по наблюдениям  $y_1, \dots, y_n$ :  $E \left( \hat{x}_n - \bar{x}_n \right) \left( \hat{x}_n - \bar{x}_n \right)^T \rightarrow \min$ . Расширенный фильтр Калмана упрощенно заменяет (14) на линеаризованное уравнение.

Поскольку погрешности наблюдений некоррелированы, то компоненты вектора  $y_n$  можно обрабатывать последовательно как одномерные. По-прежнему начиная с  $\left( \hat{x}_{n-1}, \Gamma_{n-1} \right)$  и вычисляя матрицу  $\hat{\Gamma}_n$  из (15), получаем отправную точку в виде  $\left( \hat{x}_n^0, \Gamma_n^0 \right) = \left( \hat{x}_{n-1}, \hat{\Gamma}_n \right)$ . Далее одномерные наблюдения  $y_n^k = f_n^k(x_n) + \eta_n^k$ ,  $k = 1, \dots, m_n$ , обрабатываются по мере поступления:

$$\bar{x}_n^k = \bar{x}_n^{k-1} + \frac{\Gamma_n^{k-1} H_n^{i'}}{H_n^k \Gamma_n^{k-1} H_n^{i'} + V_n^{kk}} \left( y_n^k - f_n^k(\bar{x}_n^{k-1}) \right) \quad (19)$$

$$\Gamma_n^k = \Gamma_n^{k-1} - \frac{\left( H_n^k \Gamma_n^{k-1} \right) \left( H_n^k \Gamma_n^{k-1} \right)^T}{H_n^k \Gamma_n^{k-1} H_n^{i'} + V_n^{kk}}, \quad (20)$$

где  $H_n^k$  - k-тая строка матрицы  $H_n$ . При этом конечный результат  $\left( \hat{x}_n^{m_n}, \Gamma_n^{m_n} \right)$  получается тем же, что и при обработке всего вектора наблюдений сразу, но появляется возможность подстраивать спот-кривую после каждой сделки в режиме реального времени. Кроме того, отпадает необходимость обращаться многомерную матрицу в выражениях (16), (17).

Использовавшийся в расчетах алгоритм имел несколько отличий от (19), (20):

- строки  $H_n^k$  матрицы  $H_n$  для  $k > 1$  вычислялись последовательно по мере получения новых оценок  $\bar{x}_n^{k-1}$ :

$$H_n^k = \left. \frac{\partial f_n^k(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_n^{k-1}} ;$$

- в знаменателе было добавлено слагаемое  $robust * \left( y_n^k - f_n^k(\bar{x}_n^{k-1}) \right)^2$ , где  $robust$  - постоянный коэффициент;

- во избежание выхода оценки параметра  $\tau$  за разумные пределы, особенно на начальном этапе «настройки» фильтра, были установлены ограничения  $0.3 \leq \bar{\tau} \leq 10$ , хотя в процессе тестирования эти ограничения никогда не нарушались;
- на каждом шаге оценивания контролировалась неотрицательность форвардной кривой на всем интервале  $t \geq 0$ ; если бы это условие нарушилось, то оценка  $\bar{x}_n$  была бы скорректирована таким образом, чтобы подобрать ближайший вектор  $\tilde{x}_n$ , при котором выполняется условие неотрицательности; однако условие неотрицательности форвардной кривой также ни разу не нарушалось.

#### Подбор параметров и результаты расчетов

Описанный алгоритм применялся для обработки результатов сделок с ГКО-ОФЗ в период с 11.06 по 27.10.2003. Учитывались все сделки, хотя, видимо, целесообразно отбрасывать сделки с выпусками, по которым до даты погашения остается менее определенного срока (одного месяца, например) из-за большого случайного разброса доходностей. Поскольку анализировался достаточно короткий временной отрезок, точной настройки параметров не осуществлялось, задача состояла в том, чтобы подобрать параметры «по порядку величины» и продемонстрировать работоспособность алгоритма. Процентные ставки везде далее выражаются в базисных пунктах.

1. В те дни, когда не было пропусков данных и была возможность построить кривую NS без использования фильтра Калмана, определялись параметры  $x = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau$ . Из полученных значений были составлены временные ряды, анализ которых показал, что среднеквадратическое отклонение (СКО) ото дня ко дню каждого из первых трех параметров имеет порядок 10, а последнего параметра – 0,6. С некоторым закруглением последней величины матрица возмущений уравнения ненаблюдаемого процесса была взята в виде

$$Q = \text{diag}(100, 100, 100, 1).$$

2. СКО погрешности наблюдения может быть установлено индивидуально для каждого выпуска ГКО-ОФЗ, однако здесь упрощенно использовалось выражение, зависящее от времени до погашения облигации:

$$V = V(t) = 10e^{-0.5t} + 10$$

где  $V$  обозначает погрешность отдельного наблюдения, то есть любую из величин  $V_n^{kk}$  в (19), (20). Выбор функции  $V = V(t)$  иллюстрируется рис. 8, где показаны отклонения доходностей к погашению между последовательными сделками с одним выпуском в

зависимости от срока до погашения выпуска, при этом отклонения берутся только между теми сделками, которые совершены в течение одного дня. С некоторой долей правдоподобия такие отклонения можно интерпретировать как случайные погрешности наблюдений, и границы  $\pm\sqrt{V(t)}$  приблизительно показывают среднеквадратические отклонения этих колебаний.

3. Параметр робастности был установлен равным  $robust = 0.1$  с тем, чтобы при типичных значениях невязки  $y_n^k - f_n^k$  его влияние было не слишком заметно, но значительные выбросы отфильтровывались.

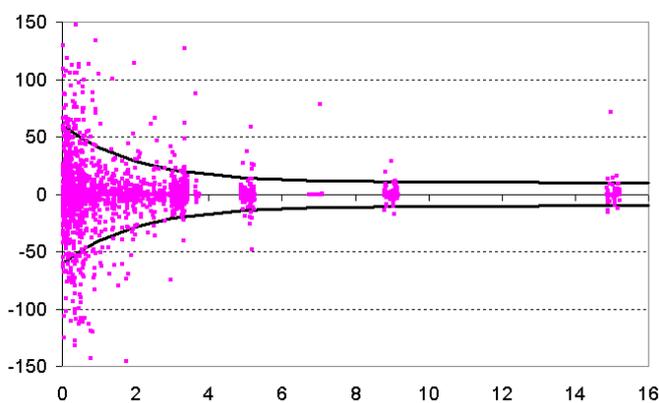


Рис. 8. Колебания доходностей к погашению в течение одного дня и кривые  $\pm\sqrt{V(t)}$

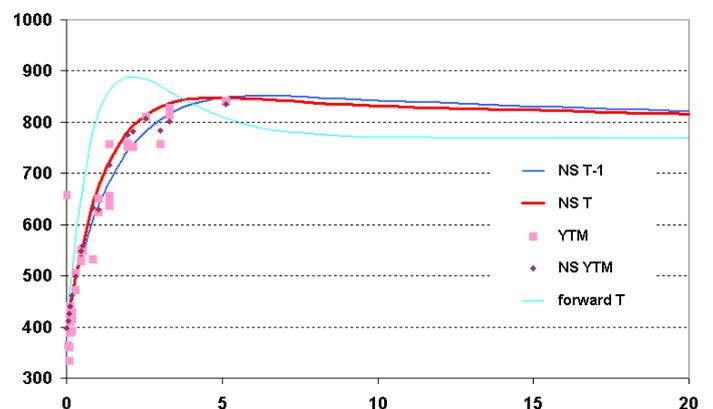


Рис. 9. Спот-кривая по итогам торгов 1.08.2003 (день T) в сравнении с днем T-1

Результатами работы алгоритма являются, в частности, все кривые NS на рис. 3 - 5. Эти кривые построены по формуле (10) на момент окончания торговой сессии соответствующего дня, то есть после обработки всех сделок этого дня. Рис. 9 демонстрирует, как данный способ решает проблему пропуска данных, описанную выше: вместо кривой, изображенной на рис. 2, получается кривая NS T, не сильно отклоняющаяся от кривой предыдущего дня NS T-1 несмотря на отсутствие данных для  $t > 5$ .

Интересно проследить влияние параметров матрицы  $Q$  на степень гладкости кривой во времени. Запишем матрицу в виде  $Q = \text{diag}(\sigma^2, \sigma^2, \sigma^2, 1)$  и рассчитаем кривые для различных параметров  $\sigma$ . Рассмотрим сечение кривой спот-ставок в точке  $t = 10$  после обработки каждой сделки. Динамика этих 10-летних ставок изображена на рис. 10. Если при  $\sigma = 50$  спот-ставка оказывается чрезмерно подвижной и имеет выбросы, то при  $\sigma = 1$  возникает заметное отставание. Выбранное ранее значение  $\sigma = 10$  дает оптимальные результаты. Как отмечалось ранее,

«потиковый» характер изменения спот-ставок в большей степени соответствует задаче создания в перспективе срочных инструментов на базе спот-кривой.

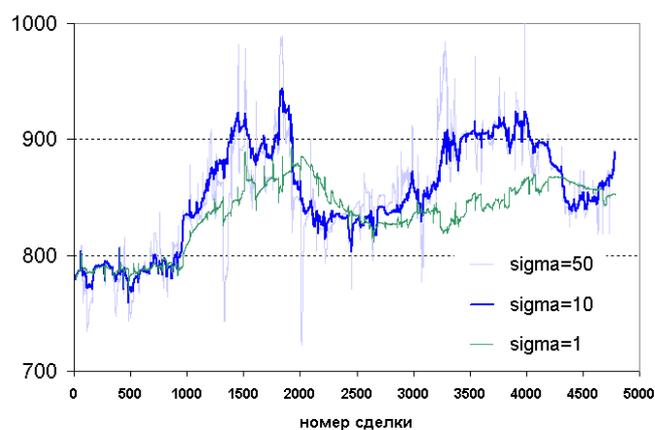


Рис. 10. Степень сглаживания в зависимости от  $\sigma$

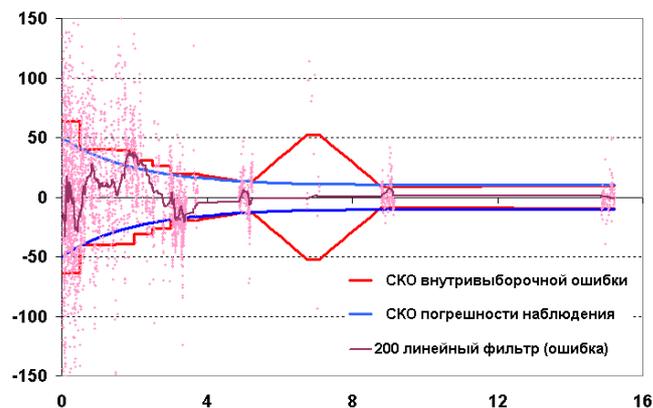


Рис. 11. Внутривыборочная ошибка оценивания за период 11.06 - 27.10.2003

На рис. 11 точками изображены внутривыборочные ошибки в зависимости от срока до погашения облигации. При этом модельные доходности рассчитывались по спот-кривой, полученной на конец торговой сессии, а внутривыборочная ошибка получалась как разница наблюдаемой доходности к погашению и модельной. На рисунке показаны СКО ошибок для различных сроков до погашения в сравнении с границами  $\pm \sqrt{V(t)}$ , подобранными ранее (рис. 8). За исключением выпуска ОФЗ 46003 со сроком погашения около 7 лет кривые приблизительно совпадают, что подтверждает правильность настройки фильтра Калмана. С другой стороны, большие отклонения для ОФЗ 46003 иллюстрируют тот факт, что для уточнения фильтра лучше использовать индивидуальный подбор величин  $V$  для различных выпусков.

Здесь описана упрощенная «эмпирическая» процедура калибровки фильтра, положительной стороной которой является ее прозрачность. Более точные настройки получаются в результате максимизации соответствующей функции правдоподобия.

## Этап II – корректировка

На рис. 11 показан также линейный фильтр внутривыборочной ошибки по 200 точкам. Отклонения среднего на начальном участке приблизительно до 4 лет достаточно значимы, чтобы рассмотреть задачу о корректировке кривой NS. С этой целью предлагается добавить к выражению (9) для кривой NS гауссовские экспоненты вида:

$$R_{NS}^{\text{mod}}(t) = R_{NS}(t) + \sum_{i=0}^N \alpha_i \exp\left(-\frac{(t-t_i)^2}{d_i}\right) \quad (21)$$

При этом соответствующая модифицированная форвардная кривая определяется выражением

$$\text{forward}_{NS}^{\text{mod}}(t) = R_{NS}^{\text{mod}}(t) + t \frac{\partial R_{NS}^{\text{mod}}(t)}{\partial t} = \text{forward}_{NS}(t) + \sum_{i=0}^N \alpha_i \left(1 - \frac{2t(t-t_i)}{d_i}\right) \exp\left(-\frac{(t-t_i)^2}{d_i}\right) \quad (22)$$

Количество дополнительных слагаемых и коэффициенты  $t_i$ ,  $d_i$  можно установить заранее, а величины  $\alpha_i$  подбирать следующим образом. Поскольку в каждый отдельно взятый день проходит мало сделок и внутривыборочные ошибки имеют большой разброс, нет смысла подстраиваться только под эти отклонения (“fitting the noise”), необходимо брать данные за несколько последних дней, скажем, за месяц. К спот-кривым NS, полученным на конец каждого из дней ретроспективного периода, добавляются одни и те же корректирующие экспоненты, рассчитываются модельные доходности и определяются внутривыборочные ошибки. Задача состоит в том, чтобы подбором коэффициентов  $\alpha_i$  добиться минимума суммы квадратов внутривыборочных ошибок за рассматриваемый период.

На рис. 12 показано, как модифицируется кривая NS и форвардная кривая, изображенные ранее на рис. 5, в результате коррекции, справа отдельно показана корректирующая добавка. При этом ретроспективный период был равен одному месяцу, в (21) использовалось  $N = 8$ ,  $t_i = 0.5i$ ,  $d_i \equiv 1$ .

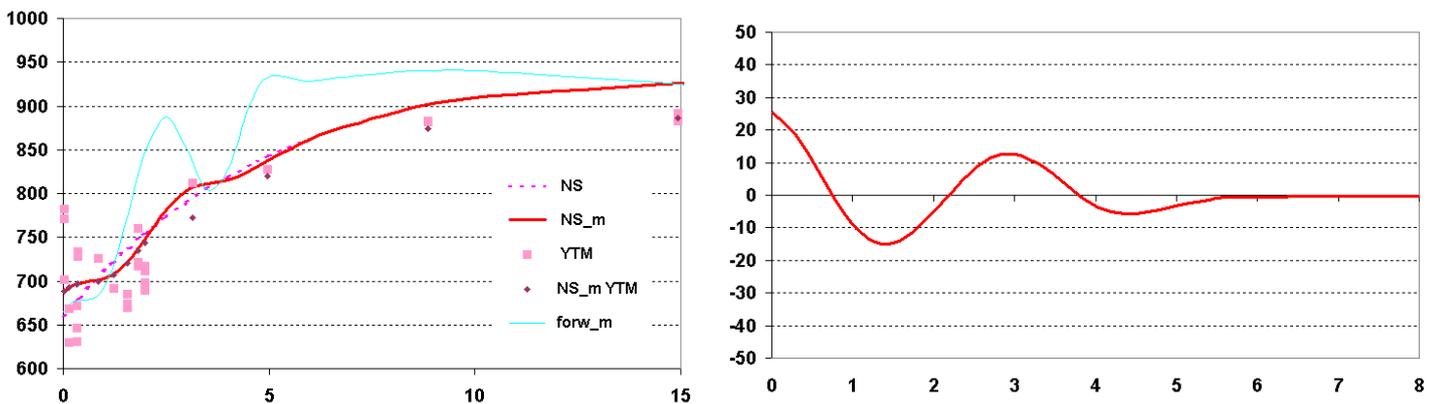


Рис. 12. Спот-кривая по итогам торгов 26.09.2003 до (NS) и после (NS\_m) коррекции и корректирующая добавка

В заключение, хотелось бы еще раз отметить, что использование широко распространенной кривой доходности (не учитывающей купонного эффекта) не дает возможность корректно разрешить многие задачи, к основным из которых относятся: определение безрисковой доходности, оценка премий к доходности при размещении, оценка стоимости ценных бумаг с

фиксированным доходом, анализ рыночных ожиданий и др. В то же время, сложившаяся на рынке ГКО-ОФЗ ситуация, а также основные направления его дальнейшего развития делают прямое копирование одного из зарубежных подходов к оценке кривой бескупонной доходности необоснованным, и формируют потребность в разработке специальной методологии, адаптированной к условиям российского рынка. Результаты применения предложенной в настоящей работе модели оценки срочной структуры процентных ставок будут предоставляться Фондовой биржей РТС во внутрисуточном режиме на ее странице в сети Интернет, что позволит проверить работоспособность алгоритма, уточнить «настраиваемые» параметры и даст возможность участникам финансового рынка высказывать свои замечания и предложения по дальнейшему совершенствованию методики оценки срочной структуры процентных ставок на российском рынке.