

Порядок расчета кривых волатильности

Кривая волатильности (кривая подразумеваемой волатильности, implied volatility curve) рассчитывается Клиринговым центром для опционов пут и колл на один базовый фьючерс с одной датой экспирации (для одной Серии опционов).

Расчет кривых волатильности происходит автоматически в соответствии с Методикой определения НКО НКЦ (АО) риск-параметров срочного рынка ПАО Московская биржа. Клиринговым центром могут быть установлены иные значения коэффициентов кривых волатильности.

I. Алгоритм расчета

1. Кривая волатильности рассчитывается в следующем порядке:
 1. Определяются цены лучших заявок опционов колл и пут (раздел II);
 2. Определяются подлежащие подстройке значения параметров кривой волатильности (в зависимости от типа «привязки кривой»);
 3. Рассчитывается кривая волатильности (раздел III);
 4. Производится подстройка коэффициентов кривой волатильности (разделы IV-VI).
2. Автоматический расчет кривых прекращается за 10 минут до начала вечерней и/или дневной клиринговых сессий.

II. Определение цен лучших заявок опционов колл и пут

1. Исходными данными для построения кривой волатильности являются:
 - цены Активных безадресных заявок на покупку и на продажу по каждой Серии опционов, количество Срочных контрактов, на заключение которых направлена заявка, и время непрерывного присутствия каждой заявки в Торговой системе в качестве Активной заявки;
 - T – время от момента расчета кривой волатильности до последнего дня заключения опционных контрактов, выраженное в долях года.
 - F – Текущая котировка Базового фьючерсного контракта в момент построения кривой волатильности.

Рассматриваются Активные безадресные заявки, объем которых превышает V_{min} и время нахождения в ТС превышает T_{min} . Параметры V_{min} и T_{min} устанавливаются Клиринговым центром.

1. Для каждого опциона определяются лучшие Активные безадресные заявки: заявка на покупку с наибольшей ценой и заявка на продажу с наименьшей ценой. Если по некоторой серии опционов отсутствуют заявки на покупку или продажу, удовлетворяющие указанным критериям отбора, то считается, что соответствующая лучшая цена отсутствует.
2. Цены лучших Активных безадресных заявок пересчитываются в подразумеваемые волатильности (implied volatility). Используется формула Блэка для маржируемых

опционов на фьючерсные контракты, то есть опционов с фьючерсным типом расчетов:

$$C = F \cdot N(d_1) - Strike \cdot N(d_2)$$

$$P = C - F + Strike,$$

где C , P – цена опциона колл и пут соответственно,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{Strike}\right) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F}{Strike}\right) - 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ – функция стандартного нормального распределения.

σ – подразумеваемая волатильность, выраженная в долях от единицы.

По цене C или P численным методом определяется подразумеваемая волатильность σ , которая для дальнейших расчетов умножается на 100. Если лучшая цена покупки или продажи на некотором страйке отсутствует, то соответствующая подразумеваемая волатильность принимается равной нулю.

Таким образом, для каждого страйка имеются 4 цены: $call_bid$, $call_ask$, put_bid , put_ask .

3. Для каждого страйка рассчитываются bid и ask :

3.1. Рассчитываются вспомогательные переменные max_bid , min_ask .

$$max_bid = \begin{cases} \max(put_bid, call_bid), & \text{если имеются обе заявки,} \\ \text{цена заявки, если имеется только одна заявка,} \\ 0 & \text{– в противном случае} \end{cases}$$

$$min_ask = \begin{cases} \min(put_ask, call_ask), & \text{если имеются обе заявки,} \\ \text{цена заявки, если имеется только одна заявка,} \\ 0 & \text{– в противном случае} \end{cases}$$

3.2. Рассчитываются bid , ask :

$$bid = \begin{cases} \min(max_bid, min_ask), & \text{если } max_bid \neq 0 \text{ и } min_ask \neq 0, \\ max_bid, & \text{если } max_bid > 0 \text{ и } min_ask = 0 \\ 0 & \text{– в противном случае} \end{cases}$$

$$ask = \begin{cases} \max(max_bid, min_ask), & \text{если } max_bid \neq 0 \text{ и } min_ask \neq 0, \\ min_ask, & \text{если } min_ask > 0 \text{ и } max_bid = 0, \\ 0 & \text{– в противном случае} \end{cases}$$

Примечание. Если $call_bid > put_ask$ или $put_bid > call_ask$ (интервалы $(call_bid, call_ask)$ и (put_bid, put_ask) не пересекаются), то в соответствии с настоящим пунктом в качестве интервала $bid - ask$ будет использован промежуток между этими интервалами, то есть $(put_ask, call_bid)$ в первом случае и $(call_ask, put_bid)$ во втором случае.

III. Расчет кривой волатильности

1. Кривая волатильности рассчитывается на основе следующей формулы:

$$\sigma = f(x, s, a, b, c, d, e) = a + b \cdot (1 - \exp(-cy^2)) + \frac{d \cdot \arctg(e \cdot y)}{e},$$

Где

s, a, b, c, d, e – параметры, подлежащие подстройке; в дальнейшем эти параметры обозначаются соответственно $\text{param}(1), \text{param}(2), \dots, \text{param}(6)$ или сокращенно $\text{param}(1 \div 6)$;

$$x = \frac{1}{\sqrt{T}} \ln \left(\frac{\text{Strike}}{F} \right) - \text{горизонтальная координата кривой};$$

$$y = x - \frac{s}{\sqrt{T}}.$$

2. Если для рассчитываемой кривой волатильности не определена Опорная кривая волатильности, то в начале подстройки параметрам присваиваются последние рассчитанные значения.
3. Если для рассчитываемой кривой волатильности определена Опорная кривая волатильности, то в начале подстройки значения параметров равны значениям параметров Опорной кривой волатильности.
4. В последний день заключения опционных контрактов, после окончания вечерней торговой сессии, теоретические цены опционов определяются на основе параметров кривой $\text{param}(1 \div 6) = (0, 0, 0, 1, 0, 1)$ в соответствии с Методикой расчета теоретической цены опциона и коэффициента «дельта».

IV. Подстройка кривой волатильности

1. Построение кривой заключается в минимизации критериальной функции C_t .
2. Критериальная функция рассчитывается как сумма экспонент ошибок по страйкам. Ошибки взвешиваются относительно удаленности от центрального страйка с помощью убывающей функции.
3. Оптимизация параметров кривой проходит два этапа:
 1. Грубая подстройка – метод псевдослучайных отклонений;
 2. Точная подстройка – метод покоординатного спуска.
4. Грубая подстройка
 - 4.1. Данный метод основан на сдвиге текущих параметров на $\xi \cdot 100$ процентов, где ξ 6-мерная квазислучайная величина, равномерно распределенная на кубе $[-1.5; 1.5]$ получаемая из квазислучайной 6×16383 последовательности Соболя (равномерно распределенные на $[0, 1]$ величины).

Если итерация грубой подстройки приводит к уменьшению критериальной функции, то производится проверка на монотонность цен опционов в соответствии с Разделом V.

Если цены опционов монотонны в соответствии с Разделом V, значения, полученные в результате данной итерации, принимаются.

5. Точная подстройка

5.1. Точная подстройка основана на методе покоординатного спуска. Один цикл точной подстройки состоит в улучшении всех 6 координат последовательно.

5.2. Улучшение одной координаты происходит по следующему алгоритму:

1. Выбирается начальный шаг $Step = Step_0$,
2. Рассчитываются значения критериальной функции при сдвиге параметра на шаг $Step$ вверх и на шаг вниз. Выбирается наименьшее значение критериальной функции и соответствующее ему направление сдвига,
3. Если сдвиг на данный шаг $Step$ в данном направлении приводит к уменьшению критериальной функции, проверяется монотонность цены опционов,
4. Если цены монотонны, алгоритм возвращается к пункту 2 настоящего подпункта,
5. Если цены не монотонны или критериальная функция не уменьшилась, шаг $Step$ уменьшается в 2 раза и алгоритм переходит к пункту 2,
6. Цикл продолжается до тех пор, пока $Step > 0.0001 \cdot Step_0$.

V. Проверка кривой волатильности на монотонность

1. Для всех Серий опционов производится проверка кривых волатильности на два различных типа монотонности в соответствии с пунктами 2 и 3 настоящего Раздела.
2. Проверяется, что цены опционов колл не возрастают по страйку, а цены опционов пут не убывают по страйку. В случае немонотонности кривой волатильности ее параметрам присваиваются предыдущие рассчитанные значения.
3. Рассчитываются производные цены опциона колл и пут по страйку для проверяемой кривой для всех страйков.

$$\frac{\partial C}{\partial Strike} = N'(d_2) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} - N(d_2)$$

$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция плотности вероятности стандартного нормального распределения.

$$\frac{\partial P}{\partial Strike} = \frac{\partial C}{\partial Strike} + 1$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0.01 \cdot \left((2 \cdot b \cdot c \cdot y \cdot \text{Exp}(-c \cdot y^2)) + \frac{d}{1 + e^2 y^2} \right)$$

Примечание: добавление множителя 0.01 при дифференцировании отражает перевод размерности подразумеваемой волатильности в доли от единицы. Данная операция обусловлена размерностью коэффициентов s,a,b,c,d,e.

Проверяется условие монотонности:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial Strike} \leq 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Strike} \geq 0 \end{cases}$$

В случае немонотонности кривой волатильности ее параметрам присваиваются предыдущие рассчитанные значения.

VI. Ограничения, применяемые к параметрам кривых

1. Значения параметров $\rho_{a,b,c,d,e}$ ограничиваются сверху и снизу. Все или некоторые ограничения могут отсутствовать.
2. В случае если задана Опорная кривая волатильности, параметры рассчитываемой кривой не могут отклоняться от параметров Опорной кривой волатильности больше, чем на соответствующие абсолютные или относительные ограничения.
3. Рассчитанное значение волатильности σ ограничивается сверху и снизу.

VII. Иные положения

1. В начале первого Торгового дня, в течение которого возможно заключение опциона в рамках Серии опционов (далее – первый день торгов Серией опционов), параметры кривой волатильности данной Серии опционов определяются Клиринговым центром с учетом принципов, определенных в подпунктах 1.1-1.3 настоящего Раздела.
 - 1.1. Если для Серии опционов в первый день торгов Серией опционов установлена Опорная кривая волатильности, то параметры кривой волатильности данной Серии опционов устанавливаются равными параметрам Опорной кривой волатильности.
 - 1.2. Если для Серии опционов в первый день торгов не установлена Опорная кривая волатильности, то параметры кривой волатильности данной Серии опционов устанавливаются следующим образом:
 - $b=0, c=1, d=0, e=1, s=0$, значение параметра a определяется экспертно,
 - где b, c, d, e, s, a , - параметры кривой волатильности, как они определены в Разделе.
 - 1.3. Клиринговым центром могут быть установлены другие параметры кривой волатильности в первый день торгов Серией опционов.